18. Essener Mathematikwettbewerb 2002/2003

als zweite Runde der 42. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde
Klasse 5

1. Aufgabe

Aus zwei Karten kann man den Anfang eines Kartenhauses bauen (siehe Abbildung 1).
Um ein zweistöckiges Kartenhaus zu bauen, benötigt man sieben Karten (siehe Abbildung 2).

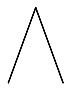


Abb. 1

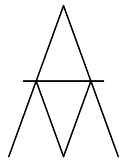


Abb. 2

1. Wie viele Karten benötigt man für ein vierstöckiges Haus?
2. Wie viele Stockwerke hat das Kartenhaus, das man aus den 104 Karten eines Kartenspiels bauen kann? Wie viele Karten bleiben übrig?

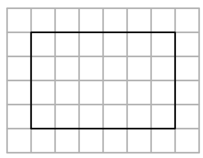
2. Aufgabe

Bekanntlich nehmen an der Bundesrunde der Mathematik-Olympiade alle 16 Bundesländer teil. Wir planen für eine künftige Bundesrunde: Jeder Teilnehmer soll als Begrüßungsgeschenk ein T-Shirt erhalten. Am T-Shirt soll man aber erkennen, aus welchem Bundesland der Teilnehmer kommt. Dazu sollen weiße T-Shirts besorgt werden, die links und rechts farbige Ärmel haben.

1. Eine Firma bietet für die Ärmel vier Farben an: blau, grün, rot und schwarz. Reicht diese Farbauswahl aus, um alle Bundesländer an den T-Shirts zu unterscheiden?
2. Leider stellte sich bei der Durchführung heraus, dass einige Teilnehmer ihre T-Shirts falsch herum angezogen hatten (vorn und hinten vertauscht). Wieso schuf dies ein Problem? Wie viele T-Shirt-Typen kann man bei vier Ärmelfarben auch dann noch unterscheiden, wenn dieses vertauschte Anziehen vorkommt?

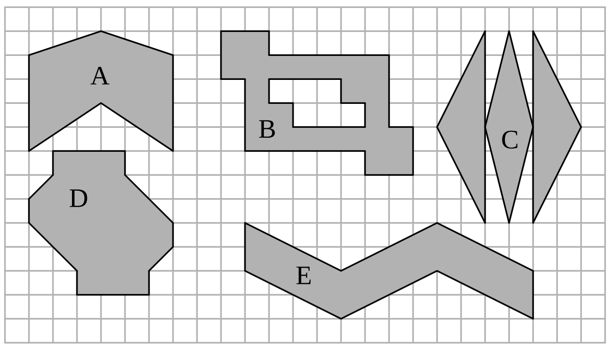
3. Aufgabe

Gegeben ist ein Rechteck mit den Seiten a und b. Die Seite a ist dabei 4 cm lang, die Seite b ist 6 cm. Das Rechteck hat damit den Flächeninhalt $A = ab = 24\,\text{cm}^2$ (siehe Abbildung , die nicht maßstabsgerecht ist).



Entscheide für jede der unten gezeigten Figuren:

Ist der Flächeninhalt der Figur kleiner, gleich oder größer als der Flächeninhalt des Rechtecks aus der Abbildung oben? Begründe!



18. Essener Mathematikwettbewerb 2002/2003

als zweite Runde der 42. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

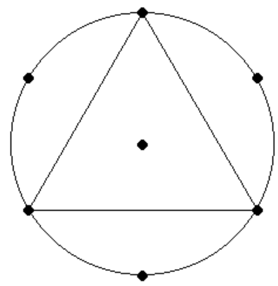
Klasse 6

1. Aufgabe

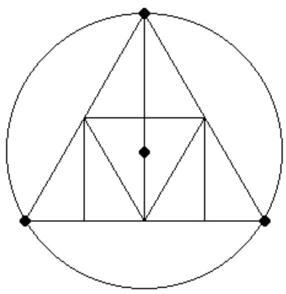
Die Schulfreunde Anita, Eike und Sven unterhalten sich über ihr Taschengeld. Eike stellt fest, dass er nur halb so viel Taschengeld bekommt wie Sven, der nur wenig älter ist als er. Anita ist die älteste von ihnen und bekommt sogar dreimal so viel Taschengeld wie Eike. Alle zusammen erhalten eine Summe, die durch 24 und 36 teilbar ist, aber nicht größer als 150 € und nicht kleiner als 100 € ist.
Wie viel Taschengeld erhält jeder von ihnen?

2. Aufgabe

Durch folgende Konstruktion kann man ein gleichseitiges Dreieck (siehe Abbildung) erhalten:
Ein Kreis mit einem Radius von 3 cm wird gezeichnet. Auf dem Kreis wird einen Punkt festgelegt. Von diesem Punkt werden aus auf dem Kreis weitere Punkte mit der gleichen Zirkelspanne von 3 cm abgetragen, indem der Zirkel immer in den zuletzt gezeichneten Punkt eingestochen wird. Man erhält sechs Punkte auf dem Kreis und verbindet jetzt jeden zweiten Punkt miteinander.



Dieses Ausgangsdreieck ist in der unteren Abbildung in 8 gleiche Dreiecke, die man durch Ausschneiden aufeinanderlegen könnte, eingeteilt worden.



Bearbeite die Aufgabe nun auf dem Arbeitsblatt:

1. Zerlege dieses gezeichnete Dreieck in 2 gleiche Dreiecke.
2. Zerlege dieses gezeichnete Dreieck in 3 gleiche Dreiecke.
3. Zerlege dieses gezeichnete Dreieck in 4 gleiche Dreiecke.
4. Zerlege dieses gezeichnete Dreieck in 6 gleiche Dreiecke.
5. Weise nach, dass sich dieses Dreieck in 192 gleiche Dreiecke zerlegen lässt.

3. Aufgabe

Bekanntlich nehmen an der Bundesrunde der Mathematik-Olympiade alle 16 Bundesländer teil. Wir planen für eine künftige Bundesrunde: Jeder Teilnehmer soll als Begrüßungsgeschenk ein T-Shirt erhalten. Am T-Shirt soll man aber erkennen, aus welchem Bundesland der Teilnehmer kommt. Dazu sollen weiße T-Shirts besorgt werden, die links und rechts farbige Ärmel haben.

1. Eine Firma bietet für die Ärmel vier Farben an: blau, grün, rot und schwarz. Reicht diese Farbauswahl aus, um alle Bundesländer an den T-Shirts zu unterscheiden?
2. Leider stellte sich bei der Durchführung heraus, dass einige Teilnehmer ihre T-Shirts falsch herum angezogen hatten (vorn und hinten vertauscht). Wieso schuf dies ein Problem? Wie viele T-Shirt-Typen kann man bei vier Ärmelfarben auch dann noch unterscheiden, wenn dieses vertauschte Anziehen vorkommt?
3. Um dieses Problem zu lösen, schlug die T-Shirt-Firma vor, im nächsten Jahr fünf Farben zu verwenden, also noch violett dazuzunehmen. Wird dadurch das Problem gelöst?

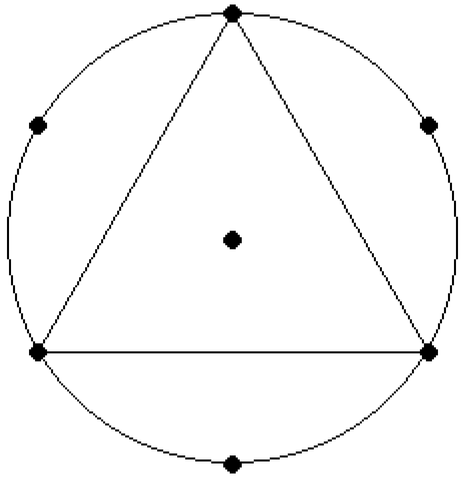
18. Essener Mathematikwettbewerb 2002/2003

als zweite Runde der 42. Deutschen Mathematikolympiade

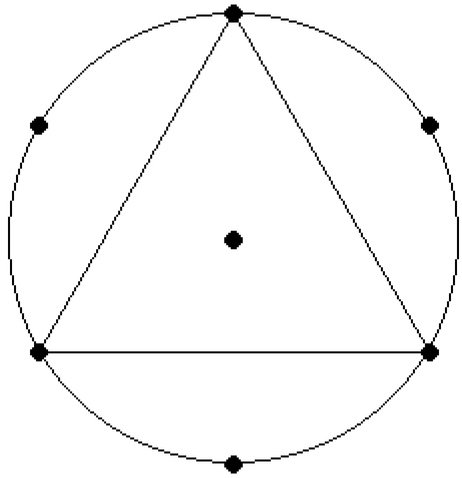
Klasse 6

Arbeitsblatt zur Aufgabe 2

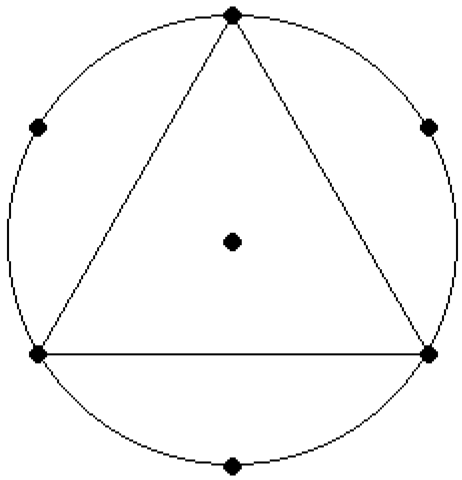
Name:



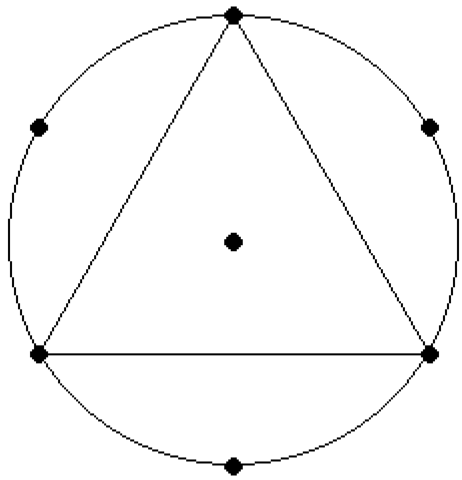
Zerlege das Dreieck in 2 gleiche Dreiecke



Zerlege das Dreieck in 3 gleiche Dreiecke



Zerlege das Dreieck in 4 gleiche Dreiecke



Zerlege das Dreieck in 6 gleiche Dreiecke

Schreibe hier die Lösung zu Teilaufgabe 5 auf:

Weise nach, dass sich dieses Dreieck in 192 gleiche Dreiecke zerlegen lässt.

18. Essener Mathematikwettbewerb 2002/2003

als zweite Runde der 42. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 7

1. Aufgabe

In eine Kiste mit den Kantenlängen (Innenmaße) 24 cm, 36 cm, 48 cm sollen Päckchen mit den Kantenlängen (Außenmaße) 4 cm, 12 cm, 16 cm gepackt werden. Das Einpacken soll so erfolgen, dass jeweils gleichlange Kanten in gleicher Richtung verlaufen.
Wie viele Päckchen passen höchstens in die Kiste? Weise nach, dass es tatsächlich möglich ist, so viele Päckchen in die Kiste zu packen!

2. Aufgabe

Auf einer Kreislinie werden Punkte markiert. Jeder dieser Punkte soll mit jedem anderen Punkt durch eine Strecke verbunden werden.

a) Wie viele Strecken gibt es, wenn 8 Punkte markiert wurden?

b) Jemand hat Punkte markiert und jeden dieser Punkte mit jedem der restlichen Punkte verbunden. Er zählt insgesamt 45 Strecken.

   Untersuche, ob er richtig gezählt haben kann! Sollte das der Fall sein, dann gib die Anzahl der markierten Punkte an!

3. Aufgabe

Von den Schülern einer 7. Klasse haben im Monat Januar doppelt soviel, im Monat Mai viermal so viel Schüler Geburtstag wie im Monat März. Im Monat Juli haben vier Schüler weniger Geburtstag als im Monat Mai. Im Monat Oktober haben halb so viele Schüler Geburtstag wie im Monat Juli. In den anderen Monaten hat kein Schüler dieser Klasse Geburtstag. Zur Klasse gehören mehr als 30, aber weniger als 40 Schüler.

a) Wie viele Schüler umfasst diese Klasse?

b) Gib an, wie viele Kinder in den angegebenen Monaten Geburtstag haben!

18. Essener Mathematikwettbewerb 2002/2003

als zweite Runde der 42. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 8

1. Aufgabe

Die Auswertung einer Kontrollarbeit ergab, dass drei Zehntel aller Schüler mit der Note "5" und zwei Fünftel aller Schüler mit der Note "4" bewertet wurden. 8 Schüler erhielten die Note "3", die übrigen die Note "2". Der Notendurchschnitt betrug 3,9.
Ermittle, wie viele Schüler die Note "5", wie viele Schüler die Note "4" und wie viele Schüler die Note "2" erhielten!

2. Aufgabe

Zwei Touristen mieten ein Faltboot, um für vier Stunden auf einem Fluss zu paddeln. Sie erreichen mit dem Boot bei stehendem Gewässer eine durchschnittliche Eigengeschwindigkeit von 4,5 km/h. Die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses beträgt jedoch 1,5 km/h.
Auf dem Hinweg fahren die Touristen mit dem Strom, auf dem Rückweg gegen den Strom.

Wie weit können sich die Touristen höchstens vom Anlegepunkt entfernen, wenn sie pausenlos paddeln und pünktlich zurück sein wollen?

3. Aufgabe

Über ein Viereck $ABCD$ werde vorausgesetzt, dass

(1) alle Eckpunkte auf einem Kreis k mit dem Mittelpunkt M liegen,
(2) der Mittelpunkt M auf $\overline{CD}$ liegt,
(3) $\overline{AB}$ parallel zu $\overline{CD}$ verläuft,
(4) der Radius $\overline{BM}$ mit $\overline{AB}$ einen Winkel der Größe 46° bildet,
(5) $\overline{BM}$ die Diagonale $\overline{AC}$ im Punkt S schneidet.

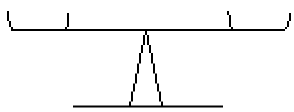
a) Ermittle unter diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels BSC!

b) Ermittle die Größe σ des Winkels BSC allgemein in Abhängigkeit von der Größe φ des gegebenen Winkels MBA!

4. Aufgabe

a) Von vier gleich aussehenden Ringen unterscheidet sich einer in der Masse von den anderen. Zeige, wie man ihn mit genau zwei Wägungen mittels einer Balkenwaage herausfinden kann!

b) Von 75 gleich aussehenden Ringen unterscheidet sich genau einer in der Masse von den anderen. Zeige, wie man mit Hilfe von zwei Wägungen auf einer Balkenwaage feststellen kann, ob dieser Ring leichter oder schwerer als die anderen Ringe ist!



So sieht eine Balkenwaage aus.

18. Essener Mathematikwettbewerb 2002/2003

als zweite Runde der 42. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 9

1. Aufgabe

Wie viele verschiedene Paare $(A; B)$ von höchstens fünfstelligen natürlichen Zahlen A und B gibt es, bei deren Addition an keiner Stelle ein Übertrag auftritt?
Hinweis: Auch die Zahlenpaare $(A; B)$ und $(B; A)$ mit $A \neq B$ gelten als verschieden.

2. Aufgabe

Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a.
Die Menge M aller Punkte P der Ebene, für die sowohl das Dreieck ΔABP als auch das Dreieck ΔADP spitzwinklig ist, bildet eine Fläche.

a) Stellen Sie diese Fläche M (zunächst ohne Begründung) graphisch dar (z. B. für $a = 6\,\text{cm}$).

b) Begründen Sie die Korrektheit der Darstellung von M.

c) Beschreiben Sie die Menge M' aller Punkte Q, für die sowohl das Dreieck ΔABQ als auch das Dreieck ΔADQ stumpfwinklig ist.

3. Aufgabe

Wir betrachten alle diejenigen Zahlen $u^3 - u$, bei denen u eine ungerade Zahl mit $u > 1$ ist.

a) Beweisen Sie, dass jede dieser Zahlen gerade ist.

b) Ermitteln Sie den größten gemeinsamen Teiler aller dieser Zahlen.

18. Essener Mathematikwettbewerb 2002/2003

als zweite Runde der 42. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 10

1. Aufgabe

Man bestimme alle (im Dezimalsystem) 6-stelligen Zahlen z mit folgenden Eigenschaften:

(1) alle Ziffern sind gerade Zahlen,

(2) die Zahl ist durch 7 teilbar,

(3) die erste Ziffer ist doppelt so groß wie die zweite,

(4) die Quersumme der gesuchten Zahl ist 10.

2. Aufgabe

Betrachten Sie für jede Primzahl $p > 5$ die Zahl $p^4 - 1$.

a) Weisen Sie nach, dass jede dieser Zahlen durch 2 teilbar ist.

b) Weisen Sie nach, dass jede dieser Zahlen sogar durch 8 teilbar ist.

c) Weisen Sie nach, dass jede dieser Zahlen sogar durch 24 teilbar ist

d) Weisen Sie nach, dass jede dieser Zahlen sogar durch 120 teilbar ist

3. Aufgabe

Das Viereck $ABCD$ sei ein Parallelogramm, der Punkt Q sei der Mittelpunkt der Seite $\overline{DA}$ und der Punkt F sei der Fußpunkt des Lotes vom Punkt B auf die Gerade QC. Man beweise, dass die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AF}$ gleich lang sind.

18. Essener Mathematikwettbewerb 2002/2003

als zweite Runde der 42. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde
Klassen 11 - 13

1. Aufgabe

Man bestimme alle (im Dezimalsystem) 6-stelligen Zahlen z mit folgenden Eigenschaften:

(1) alle Ziffern sind gerade Zahlen,

(2) die Zahl ist durch 7 teilbar,

(3) die erste Ziffer ist doppelt so groß wie die zweite,

(4) die Quersumme der gesuchten Zahl ist 10.

2. Aufgabe

Das Viereck $ABCD$ sei ein Parallelogramm, der Punkt Q sei der Mittelpunkt der Seite $\overline{DA}$ und der Punkt F sei der Fußpunkt des Lotes vom Punkt B auf die Gerade QC. Man beweise, dass die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AF}$ gleich lang sind.

3. Aufgabe

Ein Händler möchte Apfelsinen auf folgende Art und Weise aufstapeln: In der untersten Schicht liegen $a \cdot b$ Apfelsinen in einem Rechteck aus a Reihen mit je b Apfelsinen und $a, b > 1$. In der zweiten Schicht liegen in den Vertiefungen dann $(a-1) \cdot (b-1)$ Apfelsinen. So wird weiter gestapelt, bis in der obersten Schicht nur eine einzelne komplette Reihe Apfelsinen liegt (im Fall $a = b$ also nur eine einzige Apfelsine).

a) Geben Sie ein Beispiel fr a und b an, mit dem der Stapel gebaut werden kann.

b) Finden Sie alle Möglichkeiten, die der Händler hat.

Folgende Formeln könnten hilfreich sein:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \qquad (1)$$

$$1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \qquad (2)$$