

# 36. Essener Mathematikwettbewerb 2020/2021

als erste Runde der 60. Mathematik-Olympiade in Deutschland

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 10 / EF

## 1. Aufgabe

- Ben ist auf dem Weg zum Bäcker und fragt sich, ob er den verlangten Betrag mit seinem Geld passend wird bezahlen können. In seinem Geldbeutel hat er insgesamt 7 Ein-Euro-Münzen und 21 Zehn-Cent-Stücke. Welche Geldbeträge kann er damit passend bezahlen und wie viele Beträge sind das?
- Ella hat in ihrem Geldbeutel insgesamt  $x$  Ein-Euro-Münzen und  $y$  Zehn-Cent-Stücke. Wie viele verschiedene Geldbeträge kann Ella damit passend bezahlen?  
Führen Sie zur vollständigen Beantwortung dieser Frage eine Fallunterscheidung durch und finden Sie für jeden Fall eine Formel, welche die gesuchte Anzahl in Abhängigkeit von  $x$  und  $y$  angibt.

*Hinweis:* Jeder passend bezahlbare Betrag soll nur einmal gezahlt werden, auch wenn er auf unterschiedliche Arten aus den vorhandenen Geldstücken zusammengesetzt werden kann.

Die 0,00 Euro für einen kostenlosen Einkauf sollen ebenfalls als möglicher Betrag gelten.

## 2. Aufgabe

- Zeigen Sie: Sind  $a$  und  $b$  beliebige dreistellige natürliche Zahlen, so lassen die beiden sechsstelligen Zahlen  $1000a + b$  und  $1000b + a$  den gleichen Rest bei Division durch 37.
- Die 3000-stellige Zahl  $n = 9999 \dots 99$  entsteht durch das Aneinanderreihen von 3000 Neunen. Zeigen Sie: Die Zahl  $n$  ist durch 37 teilbar.

3. Aufgabe Wir betrachten ein bei  $O$  rechtwinkliges Dreieck  $OAB$  mit den Kathetenlängen  $|OA| = a$  und  $|OB| = b$ , wobei in allen Aufgabenteilen  $a > b$  sein soll.

Sei  $C$  der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecke  $\overline{AB}$  mit der Strecke  $\overline{OA}$ .

- Weisen Sie für die Länge  $|BC|$  der Strecke  $\overline{BC}$  nach, dass  $|BC| = \frac{a^2+b^2}{2a}$  gilt.
- Geben Sie ein Beispiel für positive ganze Zahlen  $a$  und  $b$  an, für welches die Länge  $|BC|$  ganzzahlig ist.  
Geben Sie ein Beispiel für positive ganze Zahlen  $a$  und  $b$  an, für welches die Länge  $|AB|$  ganzzahlig ist.
- Geben Sie ein Beispiel für positive ganze Zahlen  $a$  und  $b$  an, für welche die Längen der Seiten und der Höhen des Dreiecks  $ABC$  sämtlich ganzzahlig sind.

*Hinweis:* Die positiven ganzen Zahlen sind die Zahlen  $1, 2, 3, 4, 5, \dots$

In b) und c) ist selbstverständlich jeweils zu zeigen, dass die angegebenen Beispiele die gewünschten Eigenschaften auch haben.

# 36. Essener Mathematikwettbewerb 2020/2021

## Klasse 10 / EF

1. Teilnahmeberechtigt am Essener Mathematikwettbewerb sind Schülerinnen und Schüler Essener Schulen, die im Schuljahr 2020/2021 die Klasse 10 oder EF besuchen. Die besten Einsender der ersten Runde werden am 14. November 2020 zu einer zweiten Runde (Klausurrunde) eingeladen, bei der die Sieger des Wettbewerbs ermittelt werden.  
Die Sieger des Wettbewerbs können sich qualifizieren für die Teilnahme an der dritten Runde der Mathematikolympiade. Diese findet am 27. Februar 2021 als Landesolympiade NRW statt und ermittelt die Teilnehmer an der Deutschlandolympiade im Juni 2021.
2. Bevor du die Lösungen einschicken kannst, musst du dich registrieren unter der Adresse [www.essener-mathematikwettbewerb.de/registrierung.php](http://www.essener-mathematikwettbewerb.de/registrierung.php). Trage dort alle Daten in das Formular ein. Anschließend erhältst du Seiten im pdf-Format, die du ausdrucken und unterschreiben musst. Auf den Seiten sind auch die Datenschutzbestimmungen enthalten. Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die noch nicht volljährig sind, müssen die Datenschutzbestimmungen auch von einem Erziehungsberechtigten unterschreiben lassen. Verwende diese Seiten als Titelblätter für die Einsendung der Lösungen. Die Registrierung ist ab dem 17.08.2020 möglich.  
Die Lösungen sind auf Blätter des Formates DIN A 4 mit Rand zu schreiben. Jedes Lösungsblatt muss mit dem Namen versehen werden. Jede Aufgabe ist auf einem neuen Blatt zu beginnen.
3. Die Lösungsblätter sind durchnummerieren und mit dem Titelblatt zusammenzuheften.
4. Die Lösungen sind richtig frankiert einzusenden an:

Essener Mathematikwettbewerb  
B.M.V.-Schule  
Bardelebenstraße 9  
45147 Essen

Einsendeschluss ist der **20. September 2020** (Poststempel).

5. Die Lösung muss in leserlicher Form eingereicht werden. Alle Lösungsschritte sind darzustellen und so zu begründen, dass der Gedankengang leicht nachvollzogen werden kann.
6. Die von der Korrekturkommission getroffene Entscheidung ist endgültig („Schiedsrichterentscheidung“). Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.
7. Die korrigierten Lösungen können nicht zurückgegeben werden. Alle Teilnehmer erhalten jedoch nach Abschluss der ersten Runde eine Musterlösung.
8. Teilnehmerinnen und Teilnehmer mit nicht ganz vollständigen Lösungen können eventuell auch die zweite Runde erreichen.
9. Lösungen, die den Teilnahmebedingungen nicht entsprechen, können von der Bearbeitung ausgeschlossen werden.

Veranstalter des 36. Essener Mathematikwettbewerbs ist die Gesellschaft Essener Mathematikwettbewerb, eine Initiative von Mathematiklehrerinnen und -lehrern an Essener Schulen. Der Wettbewerb wird finanziell unterstützt von der Sparkasse Essen und von Evonik Industries.