

39. Essener Mathematikwettbewerb 2023/2024

als erste Runde der 63. Mathematik-Olympiade in Deutschland

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 9

1. Aufgabe

a) Für die Zahl a gelte

$$a = 444\,444\,444\,444\,445^2 - 444\,444\,444\,444\,444^2 + 111\,111\,111\,111\,111$$

und für die Zahl b

$$b = 544\,444\,444\,444\,444^2 - 444\,444\,444\,444\,444^2 + 111\,111\,111\,111\,111.$$

Berechne die Quersummen von a und b .

b) Zu einer gegebenen positiven ganzen Zahl s betrachten wir nun die s -stellige natürliche Zahl k , deren Zifferndarstellung aus s Einsen besteht, also $k = \underbrace{1\dots 1}_{s\text{-mal}}$, sowie die ebenfalls s -stellige natürliche Zahl

$$m = 4k = \underbrace{4\dots 4}_{s\text{-mal}}.$$

Nun ersetzen wir eine beliebige der Ziffern von m durch die Ziffer 5 und erhalten die Zahl n ; es sind also s verschiedene Werte für n möglich. Zu jedem dieser Werte bilden wir analog zur obigen Teilaufgabe die Zahl c mit

$$c = n^2 - m^2 + k.$$

Ermittle die Anzahl der Werte, welche die Quersummen dieser Zahlen c in Abhängigkeit von der Stellenzahl s annehmen können.

2. Aufgabe

Gegeben sind vier Geraden durch ihre Gleichungen.

$$g_1: y = \frac{2}{9} \cdot x + \frac{5}{9},$$

$$g_2: y = \frac{7}{6} \cdot x - \frac{59}{6},$$

$$g_3: 7 \cdot x - 6 \cdot y = 8,$$

$$g_4: 2 \cdot x - 9 \cdot y = -56.$$

Klassifiziere das konvexe Vieleck so genau wie möglich, das durch die Schnittpunkte dieser vier Geraden bestimmt ist.

Hinweis: Klassifizieren bedeutet hier zu klären, wie viele Ecken das Vieleck hat und ob es besondere Eigenschaften bezüglich der Seiten oder Winkel gibt, sodass dem Vieleck eine besondere Bezeichnung (zum Beispiel: gleichseitiges Dreieck, Rechteck, gleichwinkliges Sechseck) zugewiesen werden kann.

3. Aufgabe

a) In der Ebene sind zwei Punkte A und B gegeben. Bestimme alle Punkte P der Ebene, für welche die Summe der Abstände

$$|AP| + |BP|$$

des Punktes P zu den Punkten A und B minimal (also so klein wie möglich) wird. Gib den minimalen Wert an.

b) In der Ebene ist ein Quadrat $ABCD$ gegeben. Bestimme alle Punkte P der Ebene, für welche die Abstandssumme

$$|AP| + |BP| + |CP| + |DP|$$

minimal wird.

39. Essener Mathematikwettbewerb 2023/2024

Klasse 9

Teilnahmebedingungen

1. Teilnahmeberechtigt am Essener Mathematikwettbewerb sind Schülerinnen und Schüler Essener Schulen, die im Schuljahr 2023/2024 die Klasse 9 besuchen. Die besten Einsender der ersten Runde werden am 18. November 2023 zu einer zweiten Runde (Klausurrunde) eingeladen, bei der die Sieger des Wettbewerbs ermittelt werden.
Die Sieger des Wettbewerbs können sich qualifizieren für die Teilnahme an der dritten Runde der Mathematikolympiade. Diese findet am 27. Februar 2024 als Landesolympiade NRW statt und ermittelt die Teilnehmer an der Deutschlandolympiade im Juni 2024.
2. Bevor du die Lösungen einschicken kannst, musst du dich registrieren unter der Adresse www.essener-mathematikwettbewerb.de/registrierung.php. Trage dort alle Daten in das Formular ein. Anschließend erhältst du Seiten im pdf-Format, die du ausdrucken und unterschreiben musst. Auf den Seiten sind auch die Datenschutzbestimmungen enthalten. Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die noch nicht volljährig sind, müssen die Datenschutzbestimmungen auch von einem Erziehungsberechtigten unterschreiben lassen. Verwende diese Seiten als Titelblätter für die Einsendung der Lösungen. Die Registrierung ist ab dem 12.08.2023 möglich.
Die Lösungen sind auf Blätter des Formates DIN A 4 mit Rand zu schreiben. Jedes Lösungsblatt muss mit dem Namen versehen werden. Jede Aufgabe ist auf einem neuen Blatt zu beginnen.
3. Die Lösungsblätter sind durchnummerieren und mit dem Titelblatt zusammenzuheften.
4. Die Lösungen sind richtig frankiert einzusenden an:

Essener Mathematikwettbewerb
B.M.V.-Schule
Bardelebenstraße 9
45147 Essen

Einsendeschluss ist der **18. September 2023** (Poststempel).

5. Die Lösung muss in leserlicher Form eingereicht werden. Alle Lösungsschritte sind darzustellen und so zu begründen, dass der Gedankengang leicht nachvollzogen werden kann.
6. Die von der Korrekturkommission getroffene Entscheidung ist endgültig („Schiedsrichterentscheidung“). Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.
7. Die korrigierten Lösungen können nicht zurückgegeben werden. Alle Teilnehmer erhalten jedoch nach Abschluss der ersten Runde eine Musterlösung.
8. Teilnehmerinnen und Teilnehmer mit nicht ganz vollständigen Lösungen können eventuell auch die zweite Runde erreichen.
9. Lösungen, die den Teilnahmebedingungen nicht entsprechen, können von der Bearbeitung ausgeschlossen werden.

Veranstalter des 39. Essener Mathematikwettbewerbs ist die Gesellschaft Essener Mathematikwettbewerb, eine Initiative von Mathematiklehrerinnen und -lehrern an Essener Schulen. Der Wettbewerb wird finanziell unterstützt von der Sparkasse Essen und von Evonik Operations GmbH.