

40. Essener Mathematikwettbewerb 2024/2025

als erste Runde der 64. Mathematik-Olympiade in Deutschland

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 10 / EF

1. Aufgabe

a) Man bestimme die Anzahl der ganzzahligen Lösungen (x, y, z) der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.

b) Man bestimme die Anzahl der ganzzahligen Lösungen (x, y, z) der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Hinweis: Eine Lösung ist ein *geordnetes* Tripel (x, y, z) , welches die jeweilige Gleichung erfüllt.

Hinweis: Die Gleichung $x^2 + y^2 + 4 \cdot z^2 = 4$ hat genau sechs ganzzahlige Lösungen, die alle (paarweise) verschieden sind: $(0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(-2, 0, 0)$, $(0, -2, 0)$.

2. Aufgabe

In einem gegebenen Kreis betrachten wir konvexe Vierecke. Die Ecken der Vierecke dürfen im Innern des Kreises liegen oder auf diesem Kreis.

Zeigen Sie, dass jedes solcher Vierecke mit größtem Flächeninhalt dann ein Quadrat ist.

Hinweis: In jedem konvexen Viereck sind alle Innenwinkel kleiner als 180° .

3. Aufgabe

Wir berechnen für jede positive ganze Zahl n die Zahl y anhand der Formel

$$y = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3)}{4}.$$

a) Zeigen Sie, dass y für $n = 9$ und auch für $n = 2025$ jeweils das Produkt von zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist.

b) Zeigen Sie, dass y für jede positive ganze Zahl n das Produkt von zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist.

40. Essener Mathematikwettbewerb 2024/2025

Klasse 10 / EF

1. Teilnahmeberechtigt am Essener Mathematikwettbewerb sind Schülerinnen und Schüler Essener Schulen, die im Schuljahr 2024/2025 die Klasse 10 oder EF besuchen. Die besten Einsenderinnen und Einsender der ersten Runde werden am 16. November 2024 zu einer zweiten Runde (Klausurrunde) eingeladen, bei der die Sieger des Wettbewerbs ermittelt werden.
Die Sieger des Wettbewerbs können sich qualifizieren für die Teilnahme an der dritten Runde der Mathematikolympiade. Diese findet am 22. Februar 2025 als Landesolympiade NRW statt und ermittelt die Teilnehmer an der Deutschlandolympiade im Mai 2025.
2. Bevor du die Lösungen einschicken kannst, musst du dich registrieren unter der Adresse www.essener-mathematikwettbewerb.de/registrierung.php. Trage dort alle Daten in das Formular ein. Anschließend erhältst du Seiten im pdf-Format, die du ausdrucken und unterschreiben musst. Auf den Seiten sind auch die Datenschutzbestimmungen enthalten. Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die noch nicht volljährig sind, müssen die Datenschutzbestimmungen auch von einem Erziehungsberechtigten unterschreiben lassen.
Verwende diese Seiten als Titelblätter für die Einsendung der Lösungen. Die Registrierung ist ab dem 20.08.2024 möglich.
Die Lösungen sind auf Blätter des Formates DIN A 4 mit Rand zu schreiben. Jedes Lösungsblatt muss mit dem Namen versehen werden. Jede Aufgabe ist auf einem neuen Blatt zu beginnen.
3. Die Lösungsblätter sind durchnummerieren und mit dem Titelblatt zusammenzuheften.
4. Die Lösungen sind richtig frankiert einzusenden an:

Essener Mathematikwettbewerb
B.M.V.-Schule
Bardelebenstraße 9
45147 Essen

Einsendeschluss ist der **23. September 2024** (Poststempel).

5. Die Lösung muss in leserlicher Form eingereicht werden. Alle Lösungsschritte sind darzustellen und so zu begründen, dass der Gedankengang leicht nachvollzogen werden kann.
6. Die von der Korrekturkommission getroffene Entscheidung ist endgültig („Schiedsrichterentscheidung“). Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.
7. Die korrigierten Lösungen können nicht zurückgegeben werden. Alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer erhalten jedoch nach Abschluss der ersten Runde eine Musterlösung.
8. Teilnehmerinnen und Teilnehmer mit nicht ganz vollständigen Lösungen können eventuell auch die zweite Runde erreichen.
9. Lösungen, die den Teilnahmebedingungen nicht entsprechen, können von der Bearbeitung ausgeschlossen werden.

Veranstalter des 40. Essener Mathematikwettbewerbs ist die Gesellschaft Essener Mathematikwettbewerb, eine Initiative von Mathematiklehrerinnen und -lehrern an Essener Schulen. Der Wettbewerb wird finanziell unterstützt von der Sparkasse Essen.